Kanoner på Fredericia Vold

Figur 1. 84 punds kanon på Fredericia Vold

Vi skal regne lidt på en af de kanoner, der står på Fredericia Vold.

Vi har samlet nogle data om kanonen

Model	84 pund let granatkanon. ”System 1834”
Vægt ca	2216 kg
Max. skudvidde	3138 m
Max. Krudtladning	4 pund

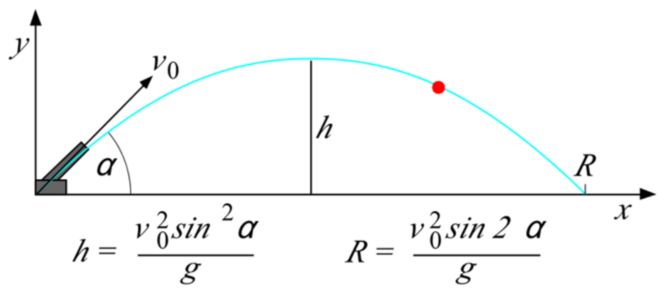
Da kanonen blev fremstillet, regnede man i Danmark masser i pund. 1 dansk pund=0,50 kg.

Opgave 1. Mundingsfarten

Mundingsfarten (som vi kalder v_0) er den hastighed granaten har når den forlader kanonen.
For at komme i gang uden voldsomme beregninger, vil vi i første omgang regne med at granaten bevæger sig uden luftmodstand.
Så gælder følgende formel for skudvidden R:

$$R = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha)}{g}$$

v_0 er mundingsfarten
α er vinklen mellem kanonløbet og vandret
g er tyngdeaccelerationen



Figur fra denstoredanske.dk

a) Vis at vi får den maximale skudvidde når $\alpha=45^0$
   Skriv udtrykket for skudvidden, når $\alpha=45^0$
b) Omskriv udtrykket, så v_0 står alene.
   I denne type kanon bruges en mindre skudvinkel end 45^0 (fladbaneskyts). Vi regner med en skudvinkel på 10^0.
   Indsæt kendte talværdier og find en værdi for v_0 .
c) Hvis vi tager hensyn til luftmodstand og gerne vil opretholde den maximale skudvidde, skal mundingsfarten så være større, mindre eller uændret?

Opgave 2. Granatens masse

Betegnelsen "84 punds kanon" er angivet ud fra en massiv jernkugle med denne masse.
I den kanon, vi regner på, blev i stedet brugt granater: En hul jernkugle fyldt med krudt. Granaten var forsynet med et fængrør, der blev antændt ved affyringen. På et forud beregnet sted i skudbanen eksploderede granaten.
I denne opgave er det praktisk at regne masser i kg og længder i dm (decimeter). 1dm =0,1m=10cm

Rumfanget 1dm^3 = 1 L. Volumen af en kugle er $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

a) Jern har densiteten (massefylden) ρ= 7,87 kg/dm^3
Beregn radius af en massiv jernkugle, der vejer 84 pund.
(Tip: Start med at finde kuglens volumen)

b) Ser resultatet fornuftigt ud ved sammenligning med billedet side 1?
(Vurder mundingens diameter ud fra foto)

Vi regner med at granaten består af en skal af jern med tykkelse 3 cm.
Hulrummet er fyldt med krudt med densiteten 1,1 kg/dm^3

c) Beregn volumen af hulrummet. Beregn derefter krudtindholdets masse.
(Tip: Start med at finde radius af hulrummet)

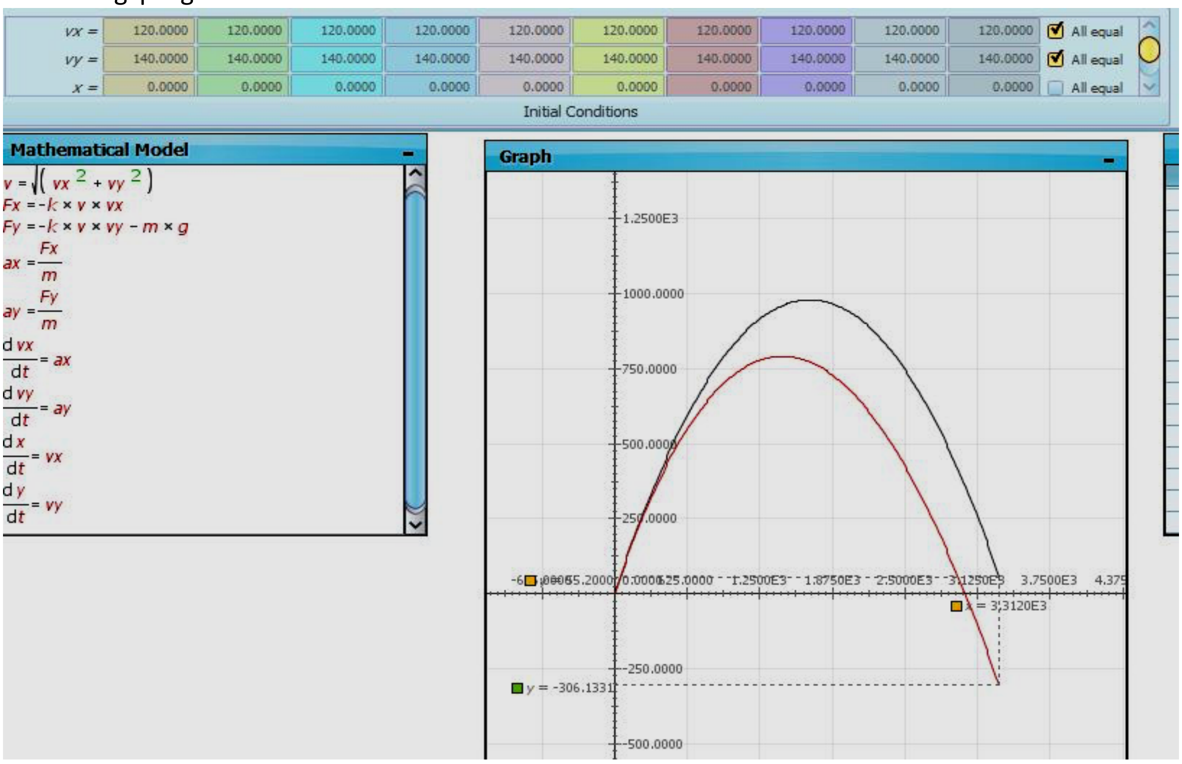
d) Beregn volumen af jernskallen. Beregn derefter jernskallens masse)
(Tip: du skal kombinere resultater fra spørgsmål a) og c))

e) Beregn granatens samlede masse.

Figur 2. Granat fra 84 punds kanon.

Opgave 3. Skud med luftmodstand

I virkelighedens verden er granaten påvirket af luftmodstand. Situationen kan behandles i et simuleringsprogram som f.eks. Modellus.

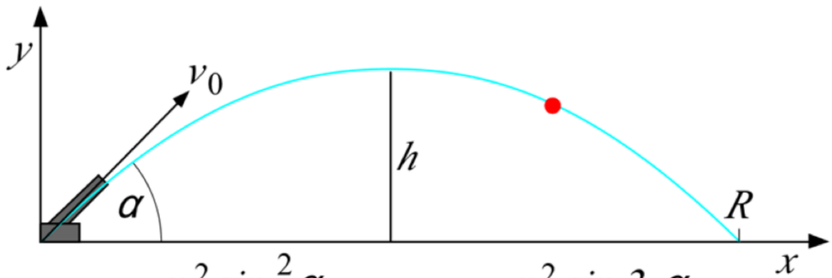


Her ses en kørsel af en simulering med og uden luftmodstand.

Prøv at variere mundingsfarten, så I rammer den maximale skudvidde med en skudvinkel α=10^0.

Husk at $v = \sqrt{vx^2 + vy^2}$, vx=v*cos(α) og vy=v*sin(α)

Boks 1. Kanonfysik – det skrå kast



$$h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} \qquad R = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Vi ser på en kanonkugle, der efter affyringen bevæger sig gennem luften. Vi vil vise at banekurven bliver en parabel, og bestemme skudvidden.
Vi deler behandlingen op, så vi analyserer de to koordinatretninger, x og y, hver for sig
I første omgang ser vi bort fra luftmodstand. Kuglen er da kun påvirket af tyngdekraften, der naturligvis er rettet lodret nedad, dvs. modsat y-aksens retning.
Kraften i y-retningen kan skrives (m er kuglens masse, g er tyngdeaccelerationen)
$F_y = - m \cdot g$
Der er ingen kraft i x-aksens retning, dvs.
$F_x=0$
Ifølge Newtons 2. lov er accelerationen lig den samlede (eller resulterende) kraft divideret med massen. Loven gælder for hver koordinatretning hver for sig. Dvs:
$a_x = -0$
$a_y = -g$
Bemærkning: Mange mennesker mener, at det er nødvendigt med en "fremaddrivende" kraft for at opretholde bevægelsen. Denne misforståelse findes i Aristoteles fysik, udviklet i det gamle Grækenland. Isaac Newton viste med sine bevægelseslove fra 1687 at en genstand kan bevæge sig med konstant hastighed uden at være påvirket af nogen kraft.

Hastigheden
Ved affyringen fik kuglen farten v0. Begyndelseshastigheden kan deles op i en x- og y-komponent, som kan udtrykkes ved sinus og cosinus til affyringsvinklen samt ved v0:
vx0 = v0·cos(α)
vy0= v0·sin(α)
I x-retningen er der ingen acceleration, dvs. ingen hastighedsændring. vx er derfor konstant lig med begyndelsesværdien:
vx(t)= v0·cos(α)
I y-retningen er accelerationen konstant og rettet nedad. I begyndelsen er y-hastigheden positiv – kuglen bevæger sig højere og højere op. Men bevægelsen bremses af tyngdekraften, og på et tidspunkt når kuglen sin største højde, h, og begynder derefter at bevæge sig nedad igen. For bevægelsen med konstant acceleration gælder:
vy(t) = vy0-g ·t
Positionen
For bevægelse med konstant hastighed – som i x-retningen – gælder at stedkoordinaten vokser lineært med tiden:
x(t) = v0x·t

Boks 1 fortsat

Banekurven

Vi har nu regneudtryk for x- og y-positionerne som funktion af tiden. Oftest er man ikke interesseret i tidsforløbet, men ønsker blot at kende banekurven, evt. blot skudvidden R.

Banekurven kan findes ved at *eliminere t*, dvs omskrive til udtryk, hvor t ikke indgår.

Først omskrives x-udtrykket, så t står alene:

$$t = \frac{x}{v_{0x}}$$

Det indsættes på t's plads i y-udtrykket. Resultatet er:

$$y = \frac{v_{ox}}{v_{0y}} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{0x}^2} \cdot x^2$$

Øvelse: Regn efter og vis at resultatet er korrekt.

Hvis vi indsætter vores udtryk for v0x og v0y, hvor affyringsvinklen indgår, fås:

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Skudvidden

Hvis vi regner med at kuglen rammer i samme højde, som den afskydes fra (y=0), kan vi finde skudvidden ved at indsætte y=0 og løse ligningen:

$$0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Resultater er

$$R = \frac{2 \cdot v_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Øvelse: Vis dette. Ved den sidste omskrivning er benyttet at $2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin(2\alpha)$

Bevægelse med luftmodstand

I virkelighedens verden vil der være en luftmodstand på kuglen. Luftmodstanden er rettet modsat bevægelsesretningen, og dens størrelse er proportional med farten i anden:

$F_{luft} = - k \cdot v^2$

Konstanten k afhænger af kuglens størrelse og form.

Opdeler vi igen i x- og y-retning fås (idet $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$):

$Fx = - k \cdot v \cdot v_x$

$Fy = -g - k \cdot v \cdot v_y$

Bevægelsesligningerne bliver nu vanskelige at løse, blandt andet fordi der i x-ligningen indgår noget om y-retningen og omvendt.

I stedet for at løse ligningerne som ovenfor, hvor resultatet bliver funktionsudtryk for x(t) og y(t), kan ligningerne løses numerisk med et passende computerprogram. Her bruges programmet Modellus. Resultatet er ikke funktionsudtryk, men en tabel og en graf. Men det er som regel også netop det, man har brug for i praktiske anvendelser.

Opgave 4. Krudtladning og kuglens hastighed

Når kanonen fyres af, omdannes en del af den kemiske energi i krudtet til bevægelsesenergi.
Kuglen presses ud af kanonløbet, mens selve kanonen også presses lidt baglæns (rekyl).
Ved forbrænding af sortkrudt frigøres ca. 285 kJ som bevægelsesenergi pr kg krudt.
Samtidig frigøres 2784 kJ varmeenergi[1]
Kanonkuglen modtager langt det meste af bevægelsesenergien.

a. Beregn hvor meget bevægelsesenergi E_{mek} og hvor meget varme Q der frigøres ved forbrænding af den maximale krudtladning på 4 pund for kanonen.
b. Antag at granatens masse er m_g=22 kg (sammenlign opg. 2). Antag desuden at granaten modtager al bevægelsesenergien ved forbrænding af 4 pund krudt.
   Beregn granatens begyndelsesfart v_0.
c. Sammenlign med resultatet fundet i opgave 1, spørgsmål b.
d. Kanonen er lavet af støbejern med varmefylde c=837 J/kg/^{0}C [2]
   Hvor meget stiger kanonens temperatur ved forbrænding af 4 pund krudt?
   (Se kanonens masse i indledningen)
e. Brug din viden om fysik og kemi til at forklare hvad der sker når krudtladningen antændes:
   Stikord: redoxproces, exoterm, idealgaslov, tryk-rumfangs-arbejde,

Opgave 5. Kanonens rekyl

Når granaten affyres, ruller kanonen lidt baglæns (rekyl)

a. Forklar hvorfor kanonen er anbragt på hjul på en skrå rampe.

Vi vil undersøge "rekylrampen" lidt mere detaljeret.
Lige efter affyringen har granaten farten v_0 og kanonen ruller tilbage med farten v_k.
Sammenhængen mellem v_0, v_k , granatens masse m_g og kanonens masse m_k er
$m_g \cdot v_0 = - m_k \cdot v_k$.
Minustegnet fortæller at de to genstande bevæger sig i modsatte retninger.
Formlen gælder, når kanonen affyres vandret. For udledning af formlen se boks 2.

b. Vi antager at kanon+ vogn har massen m_k =3000 kg. Granatens masse er forhåbentlig fundet i opgave 2, ellers må man regne med en massiv jernkugle på 84 pund.
   Granatens fart er forhåbentlig fundet i opgave 4, ellers regn med 320 m/s.
   Beregn kanonens rekyl-fart.
c. Hvor stejl er den rampe, kanonen ruller på?
   Kan måles med vinkelmåler, vurderes ud fra billedet eller måles med en vinkelmåler-app til smartphone[3]
d. Beregn den kinetiske energi af kanonen lige efter affyringen.
e. Regn med at al kinetisk energi i kanonen omdannes til potentiel energi. Hvor højt skal kanonen flytte sig?
f. Hvor langt vil kanonen rulle tilbage på grund af rekylet?
g. Beregn kanonens kinetiske energi lige efter affyringen i procent af den samlede kinetiske energi af kanon+granat.
   Hvordan passer resultatet med antagelsen, der er gjort i opgave 4 spørgsmål b ?
h. Vis at der gælder følgende generelle sammenhænge, når én samlet masse deles i to, f.eks. ved et kanonskud:

$$E_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot E_{kin} \qquad E_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot E_{kin}$$

   Hvor E_{kin} er den samlede kinetiske energi af de to genstande, E_1 og E_2 er de kinetiske energier af henholdsvis genstand 1 og 2 og m_1 og m_2 er deres masser.
   Det bør være sådan, at $E_1 + E_2 = E_{kin}$. Kontroller at det gælder.

[1] Kilde: wikipedia.dk/sprængstof
[2] Databog FysikKemi 11. udg. s.141.
[3] For eksempel Protractor 360

Boks 2. Rekyl og bevarelse af bevægelsesmængde

Begrebet *bevægelsesmængde*, også kaldet *impuls*, er defineret som produktet af en genstands masse og hastighed. symbolet for bevægelsesmængde er p:

$p = m \cdot v$

Ud fra Newtons love kan man vise at bevægelsesmængden er den samme før og efter et "stød":

$p_{før} = p_{efter}$

Et "stød" kan f.eks. være et sammenstød mellem billardkugler eller to biler ved et trafikuheld. Men et "stød" kan også være affyring af en kanon, hvor der efter "stødet" er en kanonkugle på vej i den ene retning og en kanon, der rekylerer i den anden retning.

Før affyring af kanonen står den stille, dvs. $p_{før} = 0$.

Efter affyring kan den samlede bevægelsesmængde skrives

$p_{efter} = m_g \cdot v_0 + m_k \cdot v_k$

Bruges bevægelsesmængde-bevarelse får vi så

$m_g \cdot v_0 + m_k \cdot v_k = 0$ eller

$m_g \cdot v_0 = -m_k \cdot v_k$

Det er vigtigt at forstå, at hastighed, og dermed bevægelsesmængde er retningsbestemte størrelser. Kanonen rekylerer i modsat retning af projektilet.

Det er ikke kun ved analyse af kanonskud, billardspil og trafikuheld, man benytter bevarelse af bevægelsesmængde. Når forskerne på CERN studerer sammenstød mellem elementarpartikler i deres store accelerator, benytter de bevarelse af bevægelsesmængde til at beregne egenskaberne af de partikler, der dannes ved sammenstødene.

Opgave 6. Analyse af et "kanonskud" i laboratoriet

Hvis vi ikke kan få lov at affyre en rigtig kanon, kan vi udføre et modelforsøg i laboratoriet.

Opgave 7. Teoretisk behandling af det skrå kast

Gennemgang af Boks 1

Opgave 8. Hvilket område kan man ramme med kanonen?

Ved at vippe kanonløbet, ændres afskydningsvinklen α og dermed rækkevidden *R*. Se formlen i begyndelsen af dette dokument.

a. Mål med vinkelmåler (evt. elektronisk) den aktuelle vinkel på kanonløbet.
b. Hvor langt kan man skyde med løbet i denne stilling. Max. skudvidde er anført i tabellen i starten af dokumentet. På en god dag er mundingsfarten v_0=320m/s.
c. Undersøg kanonen og vurder den mindste og største vinkel, løbet kan indstilles til.
   Hvad er den største og mindste afstand man kan beskyde?
   Tip: Under bagenden af kanonrøret er en skruegang, hvormed man kan vippe kanonen op og ned (Hvis det ikke er rustet fast). Vurder den højeste og laveste stilling og lav noget trekantsberegning. Kanonløbet vipper omkring en akse ca. midt på løbet.
d. Kanonen kan også drejes i vandret retning.
   Indtegn på et kort over Volden og dens for-terræn, det område kanonen kan beskydes.